Geometría en una retícula

Pascual Jara
Luis Merino

19 de octubre de 2013*

Resumen

Vamos a estudiar problemas relativos a polígonos simples (aquellos en los que los lados no se cruzan) cuyos vértices son puntos de una retícula (que podemos suponer es la retícula entera). El principal resultado es que podemos calcular de forma sencilla el área de un tal polígono; ésta se expresa en función de los puntos de la retícula que son interiores y los que están en la frontera (Teorema de Pick). Como aplicación vamos a estudiar algunos otros problemas aritméticos y geométricos que surgen en una retícula de forma natural.

Introducción

El tratar problemas en una retícula nos enseña la interacción que existe entre diferentes partes de la Matemática. En este caso entre el álgebra y la geometría. La teoría que vamos a iniciar tiene aplicaciones a la industria, la economía y otras ramas del saber, pero no es nuestra intención explorar estas aplicaciones, sino, de una forma lúdica aproximarnos a resultados profundos de la teoría y la aplicaciones.

Hoy no vamos a probar, de forma explícita, los resultados que vamos a ir obteniendo, pero si vamos a procurar que vosotros deduzcáis los fórmulas más relevantes que van a aparecer. Bueno, en realidad vamos a demostrar un resultado, más bien un Teorema, para incitaros en el uso de técnicas de razonamiento matemático avanzado. Esperamos que no sea demasiado difícil para vosotros.

La retícula es una retícula cuadrada formada por ejes ortogonales (perpendiculares). Ver el índice para tener una lista de los problemas que vamos a tratar, y para ver cómo está organizado el texto.

Agradeceríamos al lector que nos facilite sugerencias o comentarios sobre este texto, posibles errores y erratas y posibles extensiones de la teoría. Para ello puede utilizar la página

*ESTALMAT-Andalucía. Granada. Primer año.

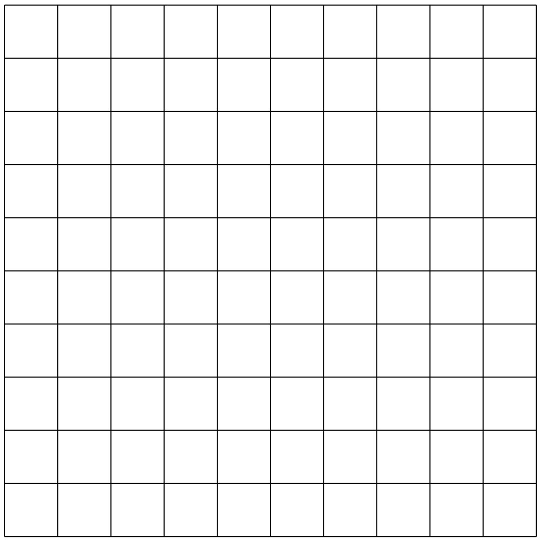
http://www.ugr.es/local/anillos/textos/pick2.htm

Índice de temas

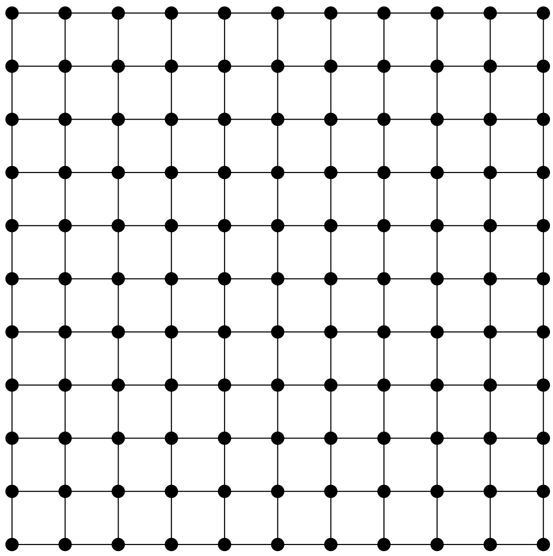
1. ¿Qué es una retícula?

Una retícula es la configuración de rectas, horizontales y verticales, que se obtienen en el plano al considerar las rectas horizontales que pasan por los puntos $(0, a)$, con $a \in \mathbb{Z}$ y las rectas verticales que pasan por los puntos $(a, 0)$, con $a \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto una retícula es algo parecido a lo siguiente:

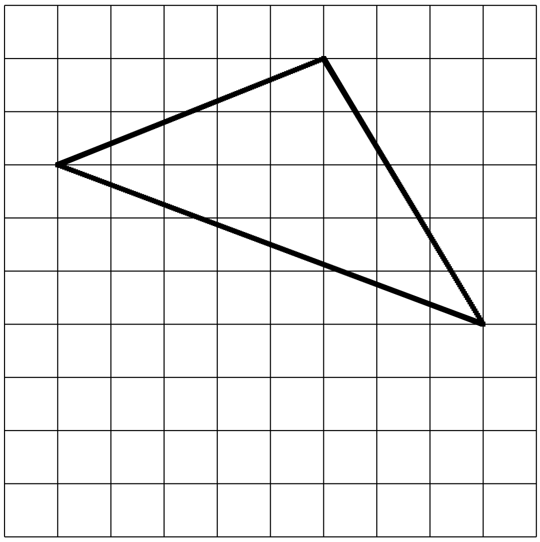


A nosotros nos interesan sólo los puntos de la retícula, los que determinan las intersecciones de estas rectas, esto es, los que aparecen señalados con un circulito negro.



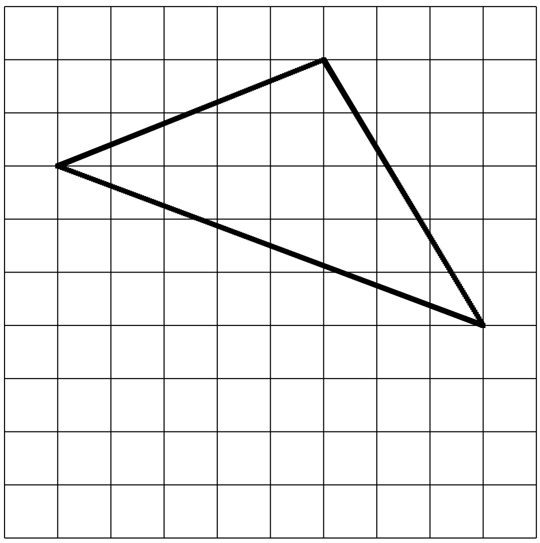
Por razones de estética no vamos a dibujar con estos circulitos negros los puntos de la retícula, salvo cuando sea necesario destacar algo con ellos.

Una figura en una retícula está delimitada por segmentos que van de un punto de la retícula a otro. Un polígono reticulado es un polígono que es una figura en la retícula. Un triángulo reticulado es, por ejemplo:

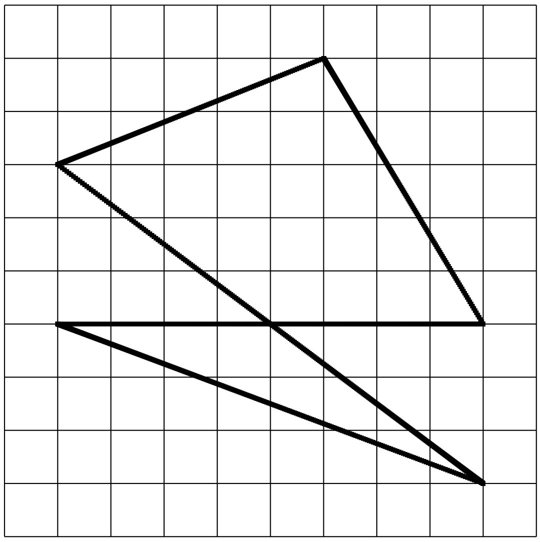


2. Figuras en una retícula

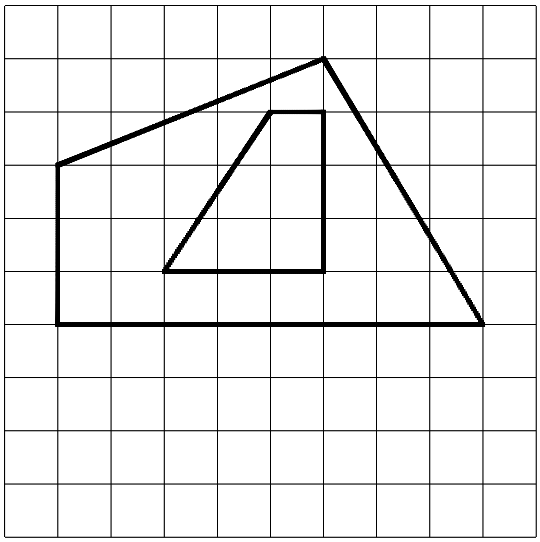
En una retícula un polígono simple es aquel en el que no se cortan ni cruzan sus aristas.



Un polígono compuesto es aquel en el que se cortan sus aristas en un punto de la retícula.



También vamos a considerar polígonos con agujeros, como el que aparece en la figura



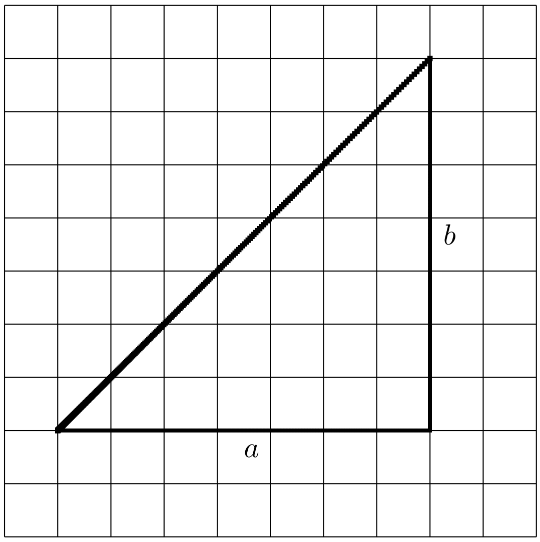
3. Medidas en una retícula

¿Qué medidas podemos hacer en una retícula?, esto es, ¿qué números nos aparece como distancias entre dos puntos de una retícula?

Una simple aplicación del Teorema de Pitágoras nos dice que los números que nos aparece son aquellos de la forma

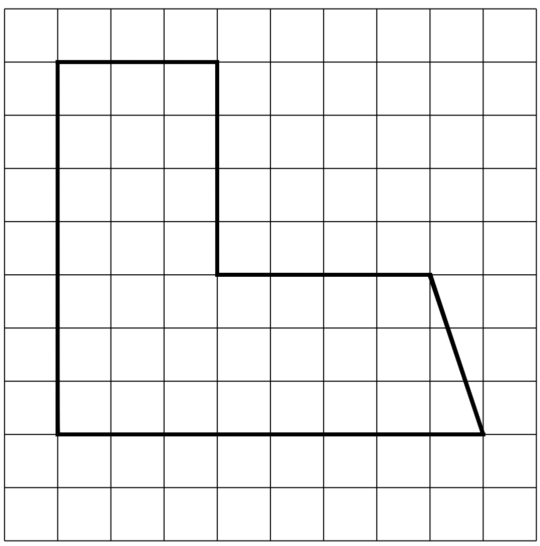
$$\sqrt{a^2+b^2}$$

donde $a, b \in \mathbb{Z}$.



Actividad: Haz una lista de los primeros números que aparecen como distancias entre puntos de la retícula. ¿Echas en falta alguno?

Vamos ahora a medir el área de un polígono reticulado simple, por ejemplo el que aparece en la siguiente figura:



Es fácil ver que el área es: 34,5.

Este número se puede alcanzar contando el número I de puntos de la retícula que hay en el interior del polígono y el número B de puntos de la retículo que hay en el borde:

$$I = 22; \qquad B = 27.$$

En este caso $34{,}5 = 22 + \frac{27}{2} - 1 = 22 + 13{,}5 - 1$.

Esta es la fórmula (Fórmula de Pick)

$$Area = I + \frac{B}{2} - 1,$$

que permite calcular el área de un polígono simple sin mas que contar puntos de la retícula.

Actividad: Comprueba la fórmula anterior en varios ejemplos.

4. Consecuencias de la Fórmula de Pick

Observa que el área de un polígono simple es siempre un número entero o la mitad de un número entero.

Este resultado tiene mucha consecuencias en la teoría.

Actividad: Trata de responder a la siguiente pregunta: ¿es posible dibujar un triángulo equilátero en una retícula? La respuesta es NO. Averigua por qué.

Es claro que siempre es posible dibujar un cuadrado en una retícula. De hecho hay muchas formas de hacerlo.

Actividad: Calcula los posibles valores de las áreas de un cuadrado reticulado.

Actividad: Tampoco es posible dibujar un pentágono regular en una retícula. Intenta probar este hecho.

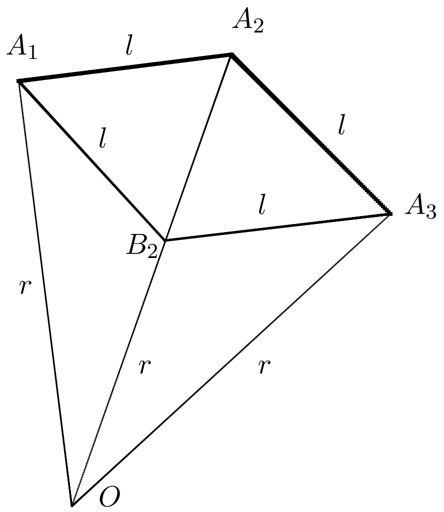
Actividad: Puesto que no se pueden dibujar triángulos equiláteros, tampoco se podrá dibujar hexágonos regulares.

Teorema: No es posible dibujar ningún polígono regular de más de seis lados en una reticula.

Basta considerar tres vértices consecutivos: A_1, A_2 y A_3. Con los segmentos $\overline{A_1A_2}$ y $\overline{A_2A_3}$ construimos un paralelogramo. Si el cuarto vértices de este paralelogramo es B_2, entonces B_2 es un punto de la retícula.

Además B_2 está sobre la recta que une A_2 y O, el centro del polígono, ya que el segmento $\overline{A_2B_2}$ es una bisectriz del ángulo $\widehat{A_1A_2A_3}$. Si llamamos l a la longitud del lado del polígono y r al radio de la circunferencia circunscrita, tenemos que $l < r$, ya que el número de lados es $n > 6$. En consecuencia el punto B_2 está sobre el segmento $\overline{A_2O}$. Al hacer esto para cada terna de vértices consecutivos resulta que los vértices B_i forman un polígono regular reticulado de área menor que el polígono original.

Repitiendo el proceso se llega a un polígono regular reticulado de área tan pequeña como queramos, lo que es una contradicción.



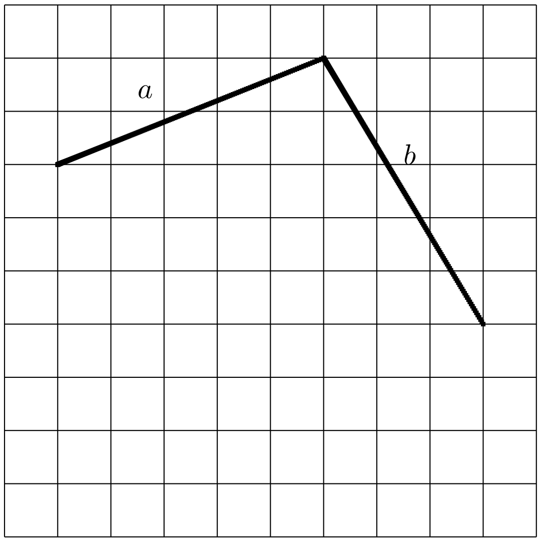
5. Modelización de problemas

Actividad: Estudia el problema de calcular el área de un polígono simple con agujeros.

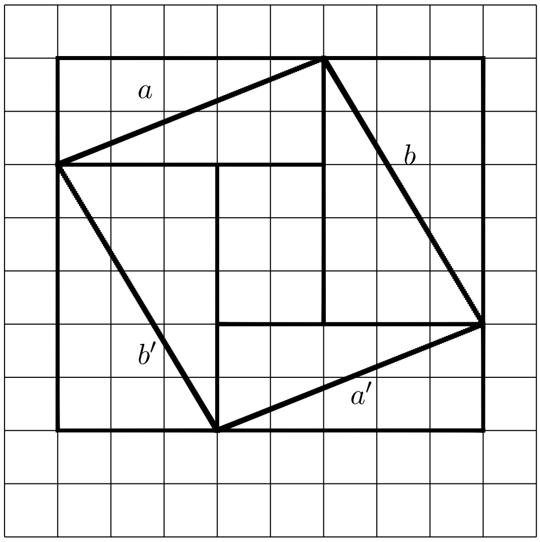
Actividad: Cálculo del área de una figura no reticulada variando el tamaño de la retícula.

Actividad: (Utilizado en la demostración de que no es posible dibujar polígonos regulares de más de seis lados.) Si en una retícula tenemos dos segmentos, no alineados, a y b que tienen un extremo común, entonces el paralelogramo construido a partir de a y b es reticulado; esto es, todos sus vértices son puntos de la retícula.

Dados los segmentos a y b:



Trasladamos b al otro extremo de a y hacemos lo mismo con a.



El resultado es un paralelogramo de lados a, b, a' y b'.

6. Puzzle de cinco piezas y seis figuras

Actividad:

1. Recorta el rectángulo de la Figura (F.1)

2. Con las piezas que has recortado construye las cuatro figuras que aparecen en la Figura (F-2).
3. Observa que el rectángulo de la Figura (F.1) y todas las piezas que aparecen se pueden construir en una retícula. Construye el rectángulo de la Figura (F.1) en una retícula, toma 12 como la longitud de la base 15 como la longitud de la altura.
4. Identifica, en la Figura (F.1), los segmentos que tiene la misma longitud.
5. Determina, y compara entre sí, las longitudes de todos los segmentos que aparecen en la Figura (F.1).
6. Construye en una retícula el *trapecio* que se forma con las cinco piezas del puzzle.
7. Construye en una retícula la *cruz latina* que se forma con las cinco piezas del puzzle.
8. Construye en una retícula el *cuadrado* que se forma con las cinco piezas del puzzle.
9. Construye en una retícula el *triángulo rectángulo* que se forma con las cinco piezas del puzzle.
10. Construye en una retícula el *diamante* (romboide) que se forma con las cinco piezas del puzzle.

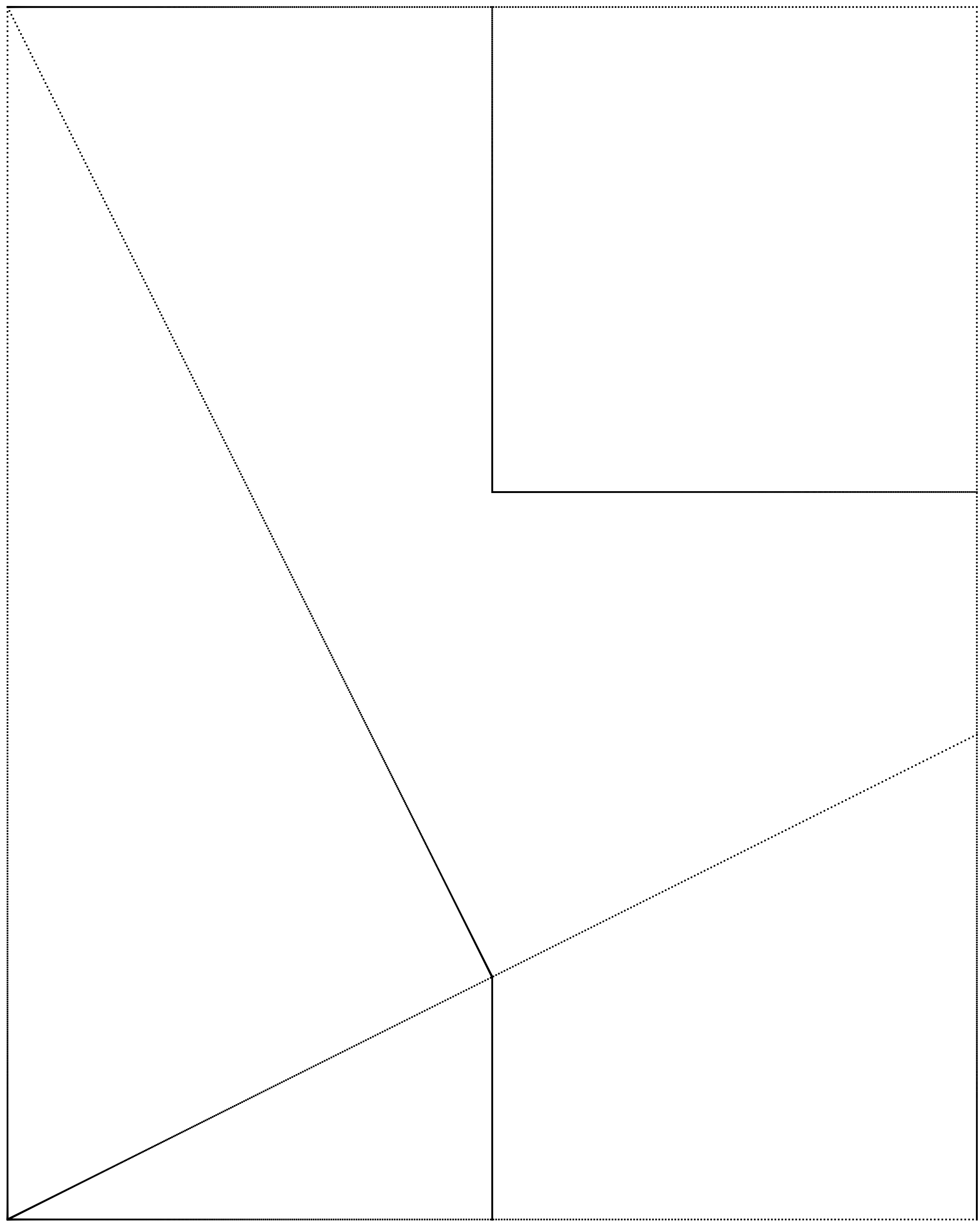


Figura (F.1)

Figura (F.2)

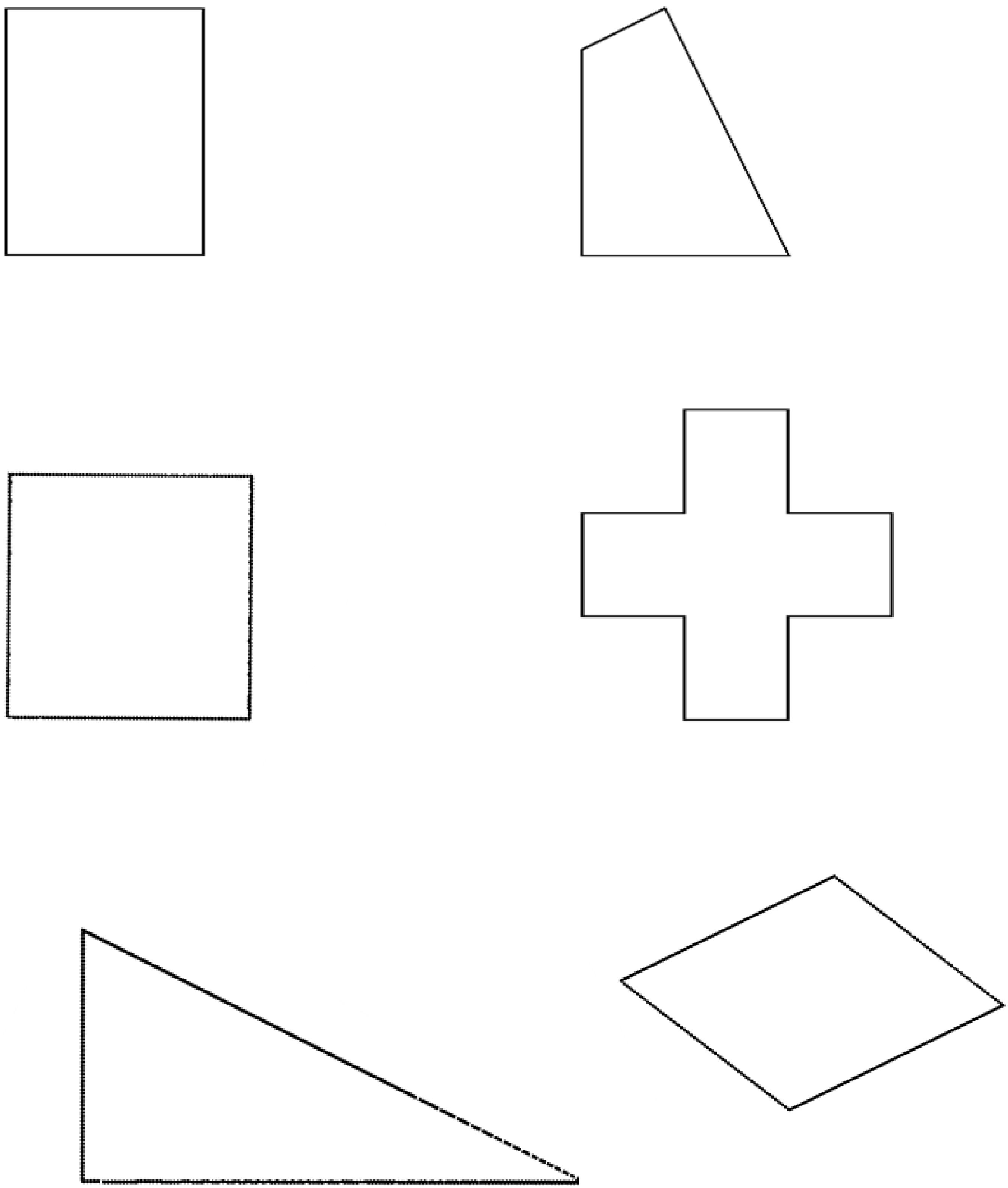


Figura (F.2)

Solución: (La relación es: $b = \sqrt{5}\, a$, y las longitudes de los segmentos son:)

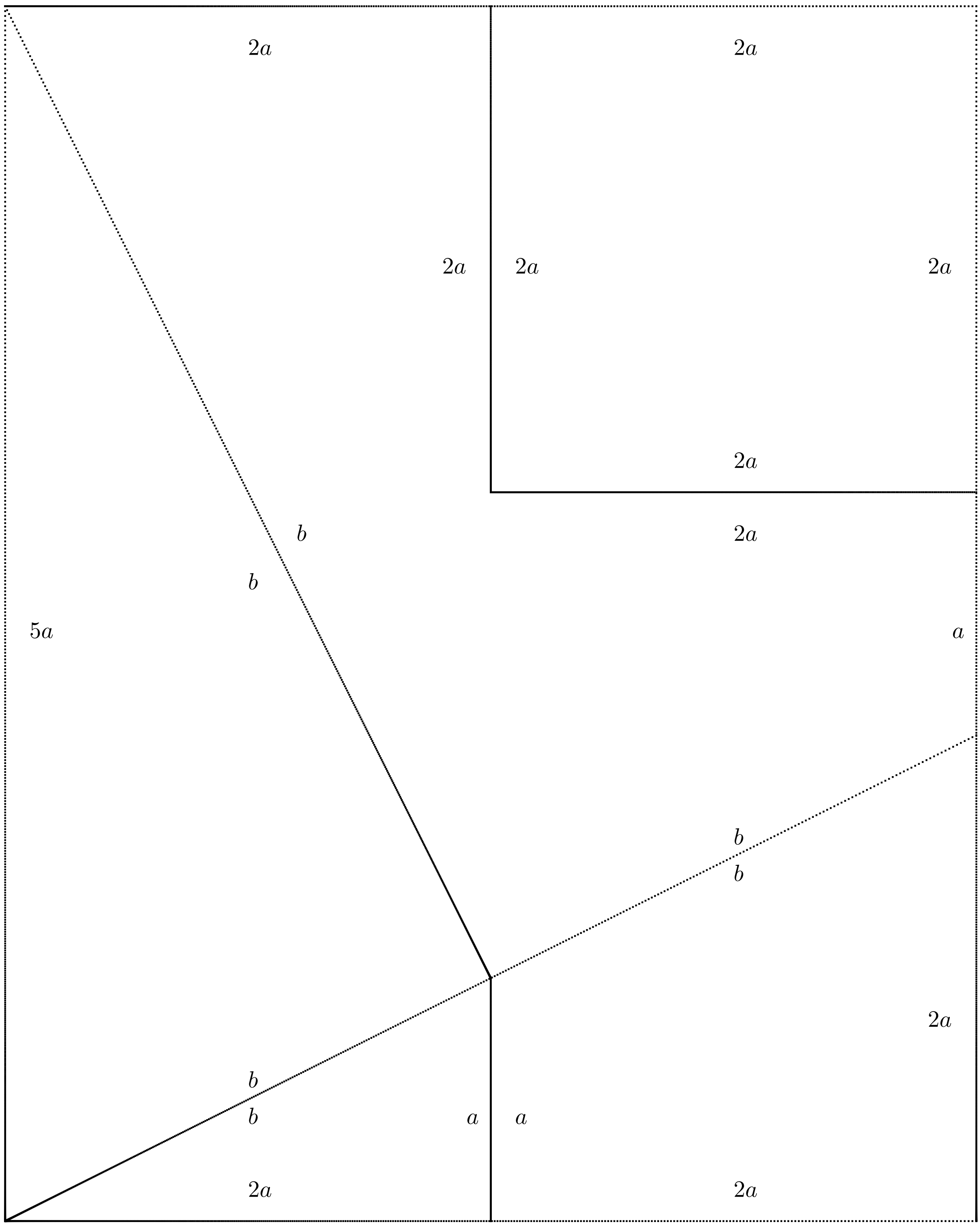
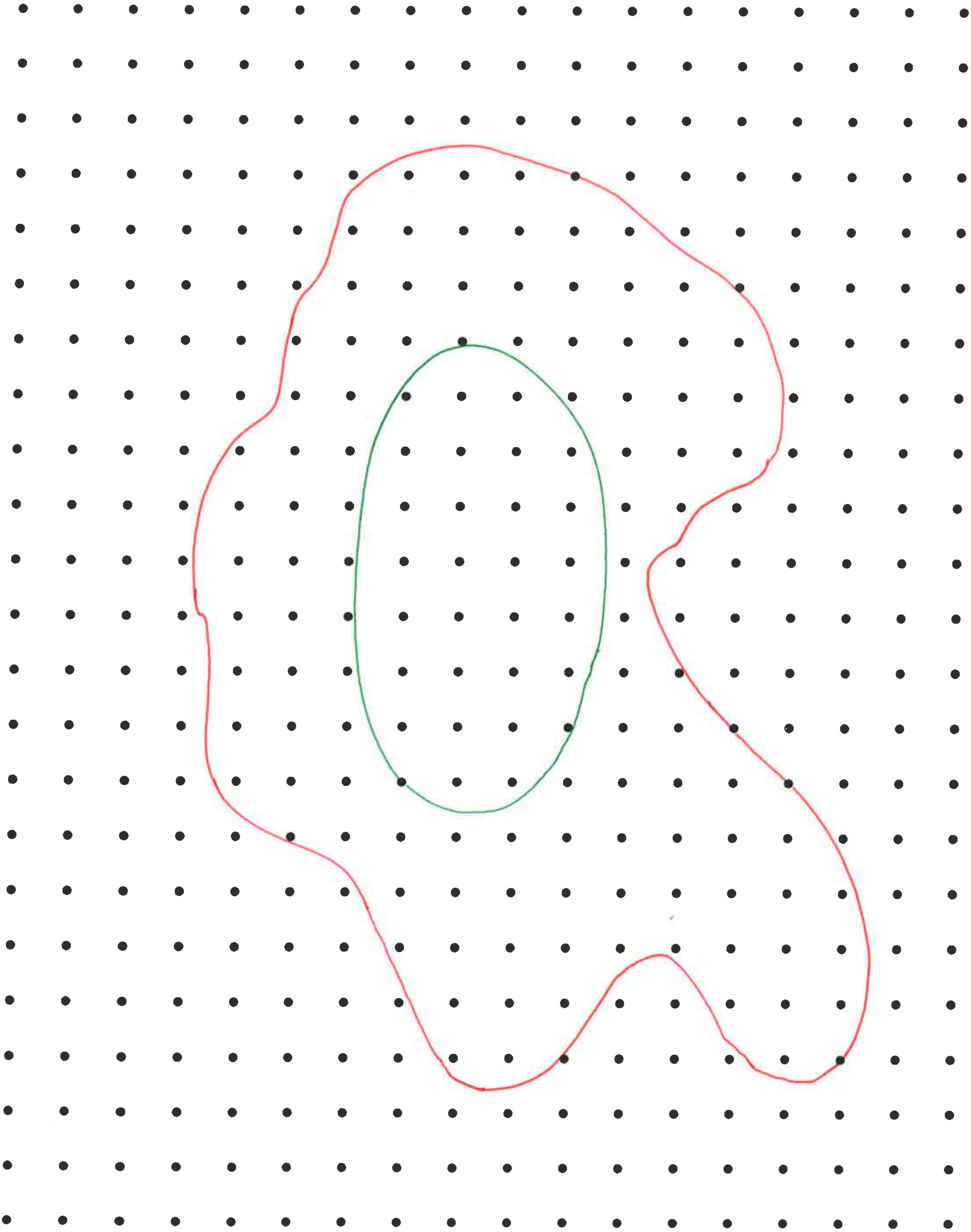


Figura (F.3)

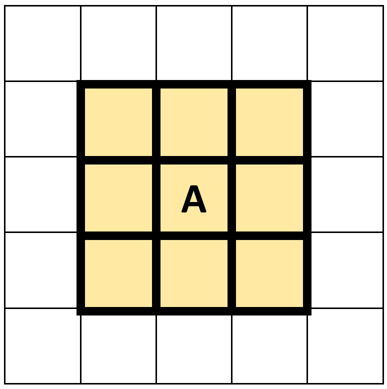
Hablar de huecos y la característica de Euler. Poner ejemplos



Circuitos de Carreras

Vamos a establecer las normas que rigen las carreras en nuestros circuitos.

1. Se inicia la carrera situando el móvil en una de las casillas de la línea de salida.
2. El primer movimiento consiste en avanzar a la línea siguiente, ocupando la casilla inmediata contigua en la primera línea, o columna, dentro de circuito.
3. Cada uno de los siguientes movimientos se realiza repitiendo el movimiento inmediato anterior; si este movimiento lleva a la casilla A, para finalizar el movimiento se debe elegir la casilla final, que puede ser la misma A o cualquiera de las ocho adyacentes.



4. En ningún caso la casilla final ni la trayectoria, entendiendo por tal el segmento que une la casilla inicial con la casilla final, de cada movimiento podrá estar fuera del circuito previamente trazado; consistiendo la penalización en volver a la línea de salida.
5. Si juegan varios equipos en el mismo circuito, en una misma casilla puede haber móviles correspondientes a equipos distintos.
6. El ganador del juego será aquel equipo que complete el circuito, llegando exactamente a una de las casillas de la línea de meta, en un menor número de movimientos. Aquel equipo que sobrepase la línea de meta se habrá salido del circuito, por lo que deberá regresar a la línea de salida.

Primer circuito

		1	2	3	4	5	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	99
6	**S**																													=
5	**A**																													**M**
4	**L**																													**E**
3	**I**																													**T**
2	**D**																													**A**
1	**A**																													=
		1	2	3	4	5	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	99

Describe el recorrido del móvil desde la **SALIDA** a la **META**. Gana el equipo que haga el recorrido en un menor número de movimientos.

Para describir el recorrido tienes que hacer una lista de las coordenadas de la casilla que ocupa el móvil al final de cada movimiento, y otra con los movimientos realizados.

Haced todos los ensayos que queráis, sólo debéis entregar las soluciones correctas mediante los listados de casillas y movimientos como se indica en la tabla.

<u>Veamos un ejemplo</u>: saliendo desde la casilla **L= (0,4)**.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	99
6	**S**						x			x																		=
5	**A**			x								x																**M**
4	**L**	x																										**E**
3	**I**																											**T**
2	**D**																											**A**
1	**A**																											=
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	99

Listado de casillas: **(0,4),** (1,4), (3,5), (6,6), (9,6), (11,5), etc.

Los movimientos realizados han sido los siguientes:

Listado de movimientos: (1,0), (2,1), (3,1), (3,0), (2,-1), etc.

Núm. de movimiento:		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**...**	**...**
Listado de movimientos:		(1,0)	(2,1)	(3,1)	(3,0)	(2,-1)			
Listado de casillas:	**(0,4)**	(1,4)	(3,5)	(6,6)	(9,6)	(11,5)			

A modo de ayuda observa que en el listado de movimientos cada uno se diferencia del anterior en que la diferencia de las coordenadas, primera con primera, y segunda con segunda, es siempre 0, 1 ó -1.

Segundo circuito

		1	2	.	.	.	10	.	.	.	30	.	.	.	50	.	.	.	70	.	.	.	90	.	.	.	99
6	**S**																										**=**
5	**A**																										**M**
4	**L**																										**E**
3	**I**																										**T**
2	**D**																										**A**
1	**A**																										**=**
		1	2	.	.	.	10	.	.	.	30	.	.	.	50	.	.	.	70	.	.	.	90	.	.	.	99

Observa que en este caso el circuito se ha reducido, han aparecido obstáculos que hay que sortear; hay tres en las columnas 10, 50 y 90, y dos en las columnas 30 y 70.
Describe el recorrido del móvil desde la SALIDA a la META. Gana el equipo que haga el recorrido en un menor número de movimientos.

Podéis hacer todos los ensayos que queráis, sólo debéis entregar las soluciones correctas mediante los listados de casillas y movimientos escritos en la tabla que se os entrega.

Tercer circuito

En este circuito vamos a estudiar un problema: recorrer una trayectoria circular. Tienes que calcular el menor número de movimientos para llegar de la salida a la meta.

Podemos estudiar también el problema de dar una, dos o tres vueltas al circuito, siendo las casilla “salida” y “meta” casillas normales en las vueltas intermedias.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1															
2															
3															
4															
5															
6															
7	**SA**	**L**	**I**	**DA**											
8	**M**	**E**	**T**	**A**											
9															
10															
11															
12															
13															
14															
15															

Cuarto circuito

En este circuito vamos a estudiar un problema: recorrer una trayectoria circular. Tienes que calcular el menor número de movimientos para llegar de la salida a la meta.

Como segunda opción vamos a estudiar el problema de dar una, dos, …, diez vueltas al circuito, siendo las casilla “salida” y “meta” casillas normales en las vueltas intermedias. Estudia el número óptimo de movimientos en las vueltas intermedias.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1																				
2																				
3																				
4																				
5																				
6																				
7																				
8																				
9																				
10	SA	LI	DA																	
11	M	E	TA																	
12																				
13																				
14																				
15																				
16																				
17																				
18																				
19																				
20																				

Quinto circuito

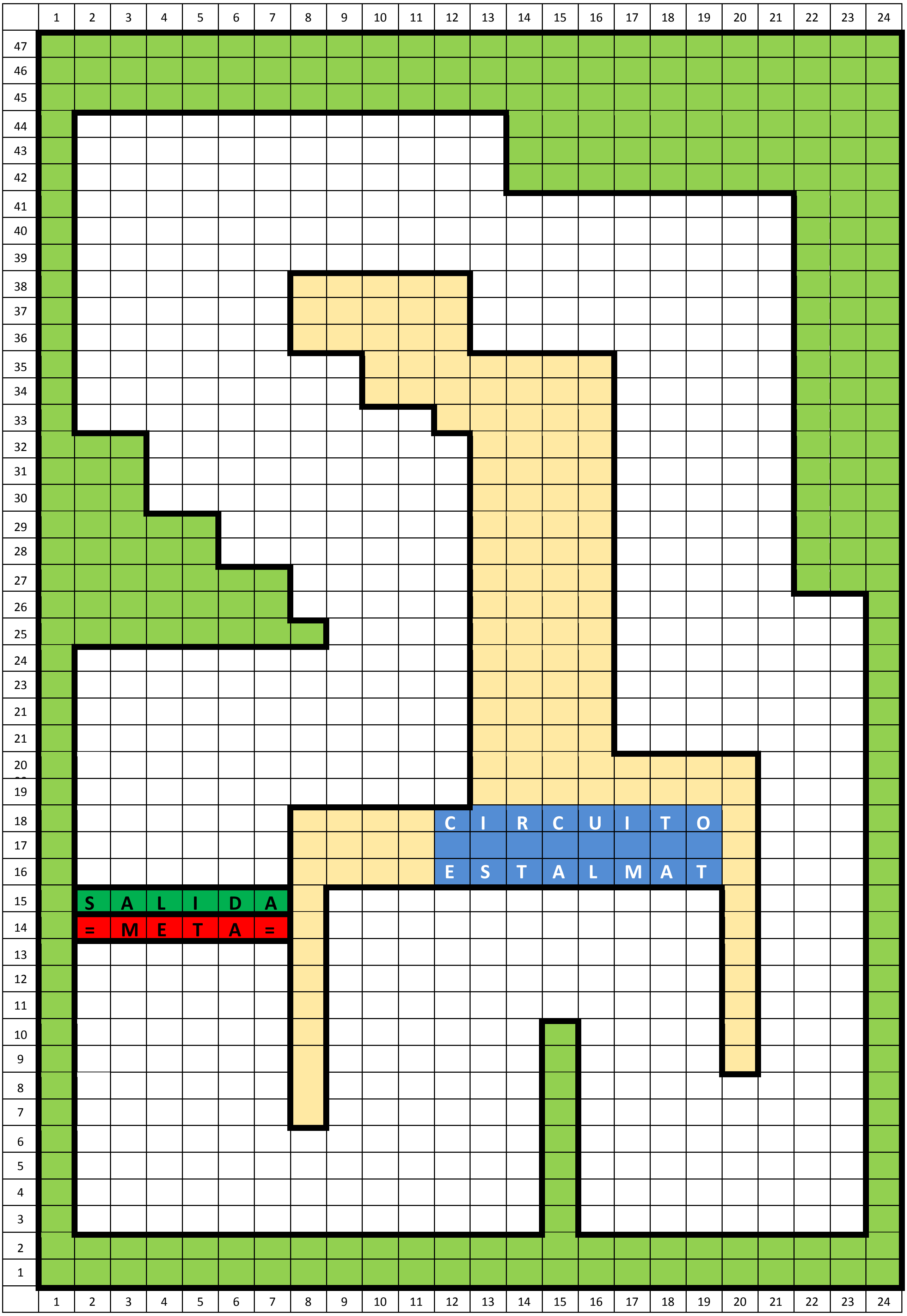
Éste es un circuito para profesionales del volante, y sólo los elegidos podrán completar satisfactoriamente el mismo en un número mínimo de movimientos.

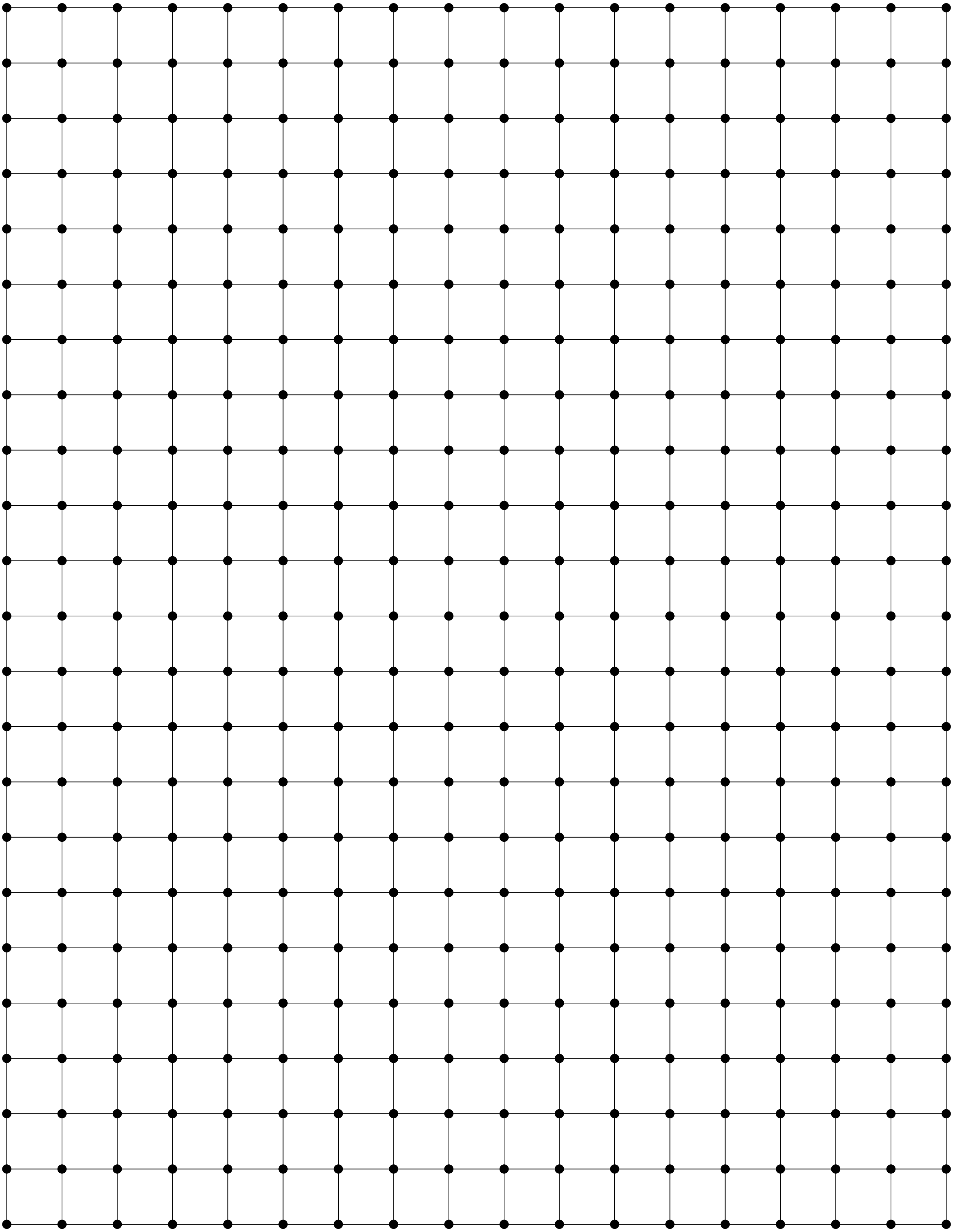
¡Adelante, comprueba tu pericia!

Y recuerda que salirse de pista supone iniciar de nuevo la carrera desde la salida.

¡Ojo!, el circuito se recorre en el sentido de las agujas del reloj.

Debéis entregar la solución correcta en una plantilla del circuito.


1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
47 46 45 44 43 42 41 40 39 38 37 36 35 34 33 32 31 30 29 28 27 26 25 24 23 21 21 20 19 18 17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
C I R C U I T O
E S T A L M A T
S A L I D A
= M E T A =
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24



Pascual Jara. Departamento de Álgebra. Universidad de Granada
Luis Merino. Departameneo de Álgebra. Universidad de Granada
.